الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التقني بوهران

التخصص: رياضيات

المقياس: التحليل II

من إعداد: مصطفى شقاق

السنة الجامعية: 2006/ 2007

الإرسال رقم: 3

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التقني بوهران

دروس لأساتذة التعليم المتوسط

الإرسال الثالث

رياضيات علوم دقيقة

مادة التحليل II

المحتوى

الفصل الرابع:

سلاسل الدوال

السلاسل الصحيحة و سلاسل فوريي

تقديم : مصطفى شقاق

قسم الرياضيات و الإعلام الآلي

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التقني

وهران, الجزائر

السلاسل الصحيحة

1. السلسلة الصحيحة:

تعريف: نسمي $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ سلسلة صحيحة كل سلسلة دوال من الشكل:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

أي: $f_n(x) = a_n x^n$

مثال 1: لنعتبر السلسلة الهندسية: $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \cdots$$

$\sum x^n$ متقاربة إذا كان: $-1 < x < 1$

المجموع هو: $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$

ملاحظة: $S_n(x)$ هو عبارة عن كثير حدود مع :

$$S_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$ ،

إذن مفهوم السلسلة الصحيحة هو تعميم لمفهوم كثيرالحدود

2. مجال تقارب سلسلة صحيحة:

1.2. مفهوم شعاع التقارب: (نصف قطر التقارب)

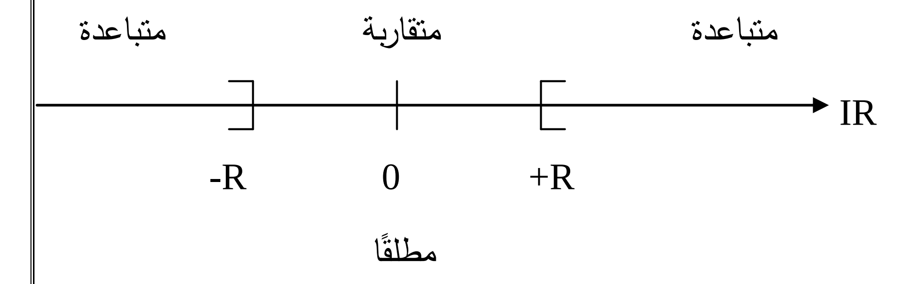
شعاع التقارب هو عدد حقيقي R موجب

يتميز بالشرطين التاليين:

1. السلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ متقاربة مطلقًا على المجال $]-R, R[$ أي $|x| < R$

2. السلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ متباعدة على المجال $]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[$ أي

$|x| > R$



2.2. مجال التقارب:

نسمي المجال $I = \left]-R,+R\right[$ بمجال تقارب

السلسلة الصحيحة مع احتمال إضافة $(-R)$ أو $(+R)$.

3.2. طريقة حساب R:

- باستعمال مقياس كوشي: $\sum\left|a_n x^n\right|$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|a_n x^n\right|} = \left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|a_n\right|}\right)|x|$$

أي: $L = \ell|x|$

* $\sum a_n x^n$ متقاربة مطلقًا إذا كان:

$$|x| < \frac{1}{\ell} \Leftrightarrow \ell.|x| < 1. \quad \Leftrightarrow L < 1$$

* $\sum a_n x^n$ متباعدة إذا كان: $|x| > \frac{1}{\ell} \Leftrightarrow L > 1$

و منه: $\boxed{R = \frac{1}{\ell}}$

- باستعمال مقياس دالمبير :

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|a_{n+1}\right|.\left|x^{n+1}\right|}{\left|a_n\right|.\left|x^n\right|}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|a_{n+1}\right|.\left|x\right|^{n+1}}{\left|a_n\right|.\left|x\right|^n}$$

$$= \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|a_{n+1}\right|}{\left|a_n\right|}\right)\left|x\right| = \ell\left|x\right|$$

$$\left|x\right| < \frac{1}{\ell} \Leftrightarrow L < 1$$

نأخذ: $\boxed{R = \frac{1}{\ell}}$

<u>الخلاصة :</u> شعاع التقارب للسلسلة الصحيحة $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ هو $R = \frac{1}{\ell}$ مع:

1. $\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|a_n\right|}$ (مقياس كوشي)

أو:

2. $\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_{n+1}|}{a_n}}$ (مقياس دالمبير)

مثال 1: لنعتبر السلسلة الصحيحة $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ حيث $a_n = \frac{1}{n!}$

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$$R = \frac{1}{\ell} \Rightarrow R = +\infty$$

السلسلة الصحيحة: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ متقاربة على IR.

مثال 2: لتكن $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ السلسلة الصحيحة مع $a_n = \frac{1}{n}$

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

و منه: $R = 1$.

حالة خاصة:− من أجل $x = 1$ السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة.

− من أجل $x = -1$ السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة.

لأن: $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ متتالية متناقصة و $\frac{1}{n} \to 0$ حسب نظرية ليبنتز .

مجال التقارب هو: $I = [-1,1[$.

مثال 3:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2n} x^n = x + 2^4 x^2 + 3^6 x^3 + \ldots$$

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$$

إذن: $R = 0$

و منه: $I = \{0\}$ ، السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2n} x^n$ متقاربة فقط عند 0.

3. التقارب المنتظم للمتتالية $(S_n(x))$:

$$S_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

لتكن $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ سلسلة صحيحة نصف قطر تقاربها R و مجموعها:

$$S(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

$$\forall x \in]-R, R[: \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x)$$

$$S(x)-S_n(x)=a_{n+1}x^{n+1}+a_{n+2}x^{n+2}+\ldots+\ldots$$

من أجل: $|x|\le r<R$

$$|S_n(x)-S(x)|\le|a_{n+1}||x|^{n+1}+|a_{n+\varepsilon}||x|^{n+2}+\ldots$$

$$\le|a_{n+1}|r^{n+1}+|a_{n+2}|r^{n+2}+\ldots$$

لدينا: $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nr^n=a_0+a_1r+a_\varepsilon r^\varepsilon+\ldots+a_nr^n+a_{n+1}r^{n+1}+\ldots$

متقاربة مطلقا و منه: $\sum_{p=n+1}^{+\infty}|a_p|r^p\to0$

$$\forall x\in\left]-R,R\right[:|S_n(x)-S(x)|\le\sum_{p=n+1}^{+\infty}|a_p|r^p.$$

$$\Rightarrow\sup_{x\in]-R,R[}|S_n(x)-S(x)|\le\sum_{p=n+1}^{+\infty}|a_p|r^p$$

بما أن: $\sum_{p=n+1}^{+\infty}|a_p|r^p\to0$

فإن: $\sup_{x\in]-R,R[}|S_n(x)-S(x)|\to0\quad(n\to+\infty)$

نتيجة: المتتالية $\{S_n\}_n$ متقاربة بانتظام نحو S على المجال $]-R,R[$

$$S_n \xrightarrow[]-R,R[]{U} S$$

4. خواص مجموع سلسلة صحيحة:

1.4. الاستمرار:

مبرهنة: مجموع سلسلة صحيحة هي دالة مستمرة على المجال

$]-R,R[$

البرهان: $\forall x \in]-R,R[, \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x)$ مع

$$S_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

(S_n) متتالية دوال مستمرة و متقاربة بانتظام نحو الدالة S على المجال

$]-R,R[$ و منه فإن الدالة S مستمرة على $]-R,R[$.

.

قابلية الاشتقاق:

لتكن $\sum a_n x^n$ سلسلة صحيحة نصف قطر تقاربها هو R .

- نسمي سلسلة مشتقة للسلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ السلسلة الصحيحة

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

- نبرهن أن السلسلتان، $\sum a_n x^n$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ لهما نفس نصف قطر التقارب.

نصف قطر تقارب السلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ هو:

$$R = \frac{1}{\ell} / \ell = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

- نصف قطر تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ هو:

$$R` = \frac{1}{\ell'} / \ell' = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(n+1) a^{n+1}}{n a^n} \right|$$

$$\ell` = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) \left| \frac{a^{n+1}}{a^n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a^{n+1}}{a^n} \right|$$

$$R = R' \quad \Leftarrow \ell = \ell'$$

$$\forall x \in \left] -R, R \right[: \ell' = \ell$$

$$\forall x \in \left]-R, R\right[: S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

$$\forall x \in \left]-R, R\right[: S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

نتيجة: مجموع سلسلة صحيحة هي دالة قابلة للإشتقاق على $\left]-R, R\right[$.

مبرهنة: مجموع سلسلة صحيحة هي دالة من الصنف C^∞ على $\left]-R, R\right[$.

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + ..$$

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^3 + \ldots + n a_n x^{n-1} + ..$$

$$S''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \ldots + n(n-1) x^{n-2} + ..$$

$$\vdots$$

$$S^p(x) = P! a_p + \ldots + n(n-1)\ldots(n-P+1) a_n x^{n-p} + \ldots$$

$$S^p(0) = P! a_p, \forall P \in IN \Rightarrow a_p = \frac{S^p(0)}{P!}, \forall P \in IN$$

و منه $\forall x \in \left]-R, R\right[$ نحصل على:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^n(0)}{n!} x^n$$

$$S(x)=S(0)+\frac{S'(0)}{1!}x+\frac{S''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{S^n(0)}{n!}x^n+\ldots$$

مثال 1:

لتكن $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ سلسلة صحيحة و $R=+\infty$, شعاع تقارب الساسلة

و منه:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^p}{P!}=S(x)$$

لنحل المعادلة تفاضلية التالية:

$$S'(x)=S(x)\Rightarrow S(x)=\lambda e^x / \lambda \in R$$

$$S(0)=1\Rightarrow \lambda e^0=\lambda=S(0)=1\Rightarrow \lambda=1$$

و منه: $\forall x\in IR: \quad S(x)=e^x$

مثال 2: لتكن السلسلة الصحيحة:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$$

و $R = 1$, شعاع تقارب الساسلة

$$I = \left]-1,1\right[\Leftarrow R = +1$$

لدينا: $nx^{n-1} = \left(x^n\right)'$

و بالتالي: $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)'$

$$= \left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}$$

3.4. مكاملة السلاسل الصحيحة:

تعريف : نسمي سلسلة أصلية للسلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ، السلسلة

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ،

نبرهن أن السلسلتين $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ و $\sum \frac{a_n}{n+1} x^n$ لهما نفس قطر التقارب.

إذا كانت: $S(x) = \sum a_n x^n, |x| < R$

فإن: $\int_0^x S(t)dt = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, |x| < R$

مثال 3: ما هو مجموع السلسلة: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$

نلاحظ أن $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ هي سلسلة أصلية للسلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

لدينا: $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = S(x)$

فإن: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt$

$$= -\log|1-t|\big]_0^x$$

$$= -\log|1-x|$$

$$= \log\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$\forall x \in]-1,1[$

5) عمليات على السلاسل الصحيحة:

1.5. مجموع سلستين صحيحتين:

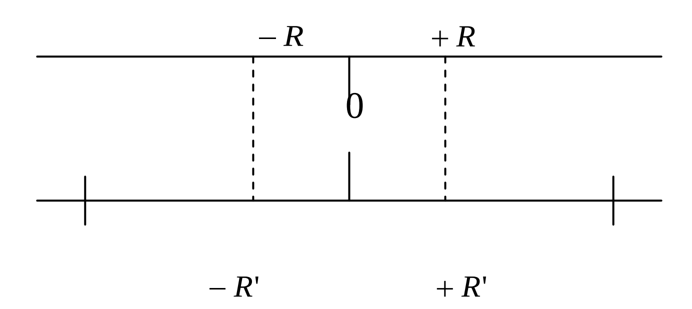
لتكن $\sum_{n=0} a_n x^n$, $\sum_{n=0} b_n x^n$ سلسلتين صحيحتين نصف قطر

تقاربهما: $R \neq 0$ و $R' \neq 0$ على التوالي، نعِرّف مجموع سلستين بِ:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$$

لدينا: $I =]-R, R[$ و $I' =]-R', R'[$

نصف قطر تقارب السلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$ هو: $R'' = \inf(R, R')$.



الضرب في عدد:

السلسلتين $\sum_{n=0} a_n x^n$ و $\lambda\left(\sum_{n=0} a_n x^n\right)$ لهما نفس

قطر التقارب مع:

$$\lambda\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lambda a_n x^n\right)$$

.3.5 جداء سلسلتين:

من أجل: $|x| < \inf(R, R')$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$$

مع: $C_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-p} b_p, \forall x \in R$

$$R'' \geq \inf(R, R'')$$

مثال 1: – لنعِرّف السلسلة الصحيحة $\sum_{n=0} a_n x^n$ كما يلي:

$$\left(\sum a_n x^n / a_0 = 1, a_1 = -1 \text{ و } a_n = 0, \forall n \geq 2\right)$$

فإن مجموع السلسلة هو $S_1(x) = 1 - x$ و نفس قطر تقاربها $R = +\infty$

- و السلسلة الصحيحة $\sum_{n=0} b_n x^n$ بِ:

$$\sum b_n x^n = \sum x^n$$

حيث مجموعها $S_2(x) = \frac{1}{1-x}$ و نفس قطر تقاربها: $R' = +1$

$$\inf(R, R') = 1$$

$$S_1(x) \cdot S_2(x) = 1 - x \cdot \frac{1}{1-x} = 1, \forall x \in \left]-1,1\right[$$

بينما: $R'' = +\infty$ $R'' > \inf(R, R')$

6. **سلاسل ماك لوران:** (تمثيل دالة من الصنف C^∞ بسلسلة صحيحة).

تعريف:

نسمي سلسلة ماك لوران لدالة f من الصنف C^∞ بجوار الصفر

(0)، السلسلة الصحيحة: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

تذكير:

إذا كانت $\sum a_n x^n$ سلسلة صحيحة فإن مجموعها $S(x)$ هو دالة من

الصنف C^∞ و لدينا من أجل $|x| < R$:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

نتيجة : كل سلسلة صحيحة $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ هي سلسلة ماك لوران لمجموعها

بجوار 0.

سؤال: (مسألة عكسية) متى يمكن تمثيل دالة f من الصنف C^∞ بجوار 0

بسلسلة صحيحة؟

الجواب: كل دالة من الصنف C^∞ بجوار 0 لا تقبل حتما تمثيلا بسلسلة ماك

لوران.

مثال مضاد:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

1. نبرهن أن f من الصنف C^{∞} على IR :

- إذا كان: $x \neq 0$ فإن $f(x)=e^{\frac{-1}{x^2}}$ هي دالة من الصنف C^{∞} على IR^*.

- إذا كان: $x = 0$ فإن $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} e^{\frac{-1}{x^2}} = 0 = f(0)$

f دالة مستمرة عند النقطة $x = 0$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{x^2}\right)' e^{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^3}e^{\frac{-1}{x^2}}=0$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^3}e^{\frac{-1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

f' دالة مستمرة عند النقطة $x=0$ أي f من الصنف C^1.

$$f''(x)=\begin{cases}\frac{4-6x^2}{x^6}e^{\frac{-1}{x^2}}; & x\neq 0\\ 0, & ;x=0\end{cases}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\dfrac{P(x)}{x^{3n}}e^{\frac{-1}{x^2}}; & x\neq 0\\ 0 & ;x=0\end{cases}$$

لدينا: $f^{(n)}(0)=0, \forall n\in IN$

- في هذه الحالة،إن سلسلة ماك لوران سلسلة معدومة : $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0$

بينما: $f(x)\neq 0$ بجوار 0.

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0\neq f(x)$$

<u>نظرية :</u> لتكن f دالة من الصنف C^∞ على المجال $\Delta=\left]-S,S\right[$.

إذن: $\forall x\in\Delta: f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{n}(0)}{n!}x^n$

إذا و فقط إذا كانت: $\forall x\in\Delta, \lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x)=0$

حيث:

$$(0<\theta<1)\ R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)}x^{n+1}$$

هو باقي نشر ماك لوران للدالة f بجوار 0.

- نشر ماك لوران للدالة f :

$$\forall x\in\Delta,\ f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{n}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{(n+1)}$$

$0<\theta<1.$

$$f(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p+R_n(x)$$

$$n\to+\infty,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\Leftrightarrow\underline{\lim_{n\to+\infty}R_n(x)}=0$$

<u>نتيجة :</u> لتكن f دالة من الصنف C^{∞} بجوار 0 $(\Delta=]-S,S[)$ بحيث:

$$\exists M\succ 0,\left|f^{(n)}(x)\right|\le M,\forall n\in IN,\forall x\in\Delta$$

فإن:

$$\forall x\in\Delta,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

البرهان:

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|$$

$$\leq \frac{\left|f^{(n+1)}(\theta x)\right|}{(n+1)!}\left|x\right|^{n+1}$$

$$\leq \frac{M.S^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

عندما: $n \to +\infty$ ، $\frac{M.S^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ و منه: $R_n(x) \to 0$

أمثلة :

1. $f(x)=\sin x$ ، f دالة من الصنف C^{∞} بجوار 0.

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right), \forall x \in IR, \forall n \in IN.$$

لدينا: $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1, \forall x \in IR, \forall n \in IN.$

حسب النتيجة السابقة: $M=1$

$$\forall x \in IR,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{n}(0)}{n!}x^{n}$$

$$f^{(n)}(0)=\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, & n=2p\\ (-1)^{p}, & n=2p+1\end{cases}$$

$$\forall x \in IR, \sin x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

بالتالي نشر الدالة $x \to \sin x$ على شكل سلسلة ماك لوران يعطى كالآتي:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \ldots$$

2. $f(x) = Cos.x$ من الصنف C^∞

$$f^{(n)}(x) = Cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \forall x \in IR, \forall n \in IN$$

$$f^{(n)}(0) = Cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2p+1 \\ (-1)^p, & n = 2p \end{cases}$$

لدينا: $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1, \forall x \in IR, \forall n \in IN.$

$$\forall x \in IR, Cos.x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p}$$

و بالتالي نشر الدالة $x \to \cos x$ على شكل سلسلة ماك لوران يعطى كالآتي:

$$Cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p)!} + \cdots$$

3. $f(x)=e^x$ من الصنف C^∞

$$f^{(n)}(x)=e^x, \forall x\in IR, \forall \mathrm{n}\in \mathrm{IN}$$

بما أن: $x\le |x| \Rightarrow \theta x\le \theta|x|<|x| \Rightarrow e^{\theta x}\le e^{|x|}$ فإن:

$$|R_n(x)|=\left|e^{\theta x}.\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

$$\le e^{|x|}.\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

و بالتلي: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} e^{|x|}.\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$

و منه: $\lim\limits_{x\to+\infty}R_n(x)=0$ و بالتالي الدالة $x\to e^x$ تقبل تمثيلا لسلسلة ماك لوران

كما يلي:

$$\forall x\in IR, e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

ملاحظة :

تمثيل الدوال: $x \to e^{-x}$, $x \to chx$ و $x \to shx$ على شكل سلسلة ماك

لوران هو كالآتي:

.

$$e^{-x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} x^n + \cdots$$

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \cdots$$

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \cdots$$

7. تطبيق السلاسل الصحيحة لحل المعادلات التفاضلية:

تطبيق 1:

مثال 1: $y' - y = 0 \qquad (1)\ldots$

نبحث عن حل المعادلة التفاضلية على الشكل:

$$y=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$y'=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1} x^n + \cdots$$

بالتعويض في العلاقة (1) نجد:

$$y'-y=(a_1-a_0)+(2a_2-a_1)x+(3a_3-a_2)x^2+\cdots$$
$$\cdots+((n+1)a_{n+1}-a_n)x^n+\cdots=0$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a_1 - a_0 = 0 \\ 2a_2 - a_1 = 0 \\ \vdots \\ (n+1)a_{n+1} - a_n = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_0 \\ a_2 = \dfrac{a_1}{2} = \dfrac{a_0}{2} \\ \vdots \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1}, \forall n \in IN \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)n} = \frac{a_{n-2}}{(n+1)n(n-1)} = \cdots$$

$$=\frac{a_{n-k}}{(n+1)n(n-1)\cdots(n-k+1)}, \forall n\in IN^{*}, \forall k\in IN$$

$$\Leftrightarrow a_n=\frac{a_0}{n!}, \forall n\in IN$$

و بالتالي نجد:

$$y=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_0}{n!}x^n=a_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$$

و بالتالي الحل العام للمعادلة التفاضلية (1) هو:

$$y=a_0e^x$$

مثال 2: $y''-y=0 \qquad (2)\ldots$

نبحث عن حل المعادلة التفاضلية على الشكل:

$$y=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+.\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$y'=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+.\cdots+(n+1)a_{n+1}x^n+\cdots$$

$$y''=\sum_{n=1}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=2a_2+6a_3x+12a_4x^2.\cdots+(n+1)na_{n+1}x^{n-1}+\cdots$$

بالتعويض في العلاقة (2) نجد:

$$y''+y=(2a_2+a_0)+(6a_3+a_1)x+.\cdots+((n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n)x^n+\cdots=0$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} 2a_2+a_0=0 \\ 6a_3+a_1=0 \\ 12a_4+a_2=0 \\ \vdots \\ (n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n=0, \forall n\in IN \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2=-\frac{a_0}{2} \\ a_3=-\frac{a_1}{6} \\ a_4=-\frac{a_2}{12}=\frac{a_0}{24} \\ \vdots \\ a_{n+2}=-\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}, \forall n\in IN \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a_n=-\frac{a_{n-2}}{n(n-1)}=\frac{a_{n-4}}{n(n-1)(n-2)(n-3)}^*$$

$$=-\frac{a_{n-6}}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}, \forall n\in IN$$

$$\Leftrightarrow a_n=\frac{(-1)^k a_{n-2k}}{n(n-1)\cdots(n-2k+1)}$$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{a_0}{n!}, \forall n \in IN$$

$$\Leftrightarrow a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k a_0}{(2k)!}; n = 2k \\ \frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!}; n = 2k+1 \end{cases}$$

و بالتالي نجد:

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k a_0}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$= a_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

و بالتالي الحل العام للمعادلة التفاضلية (2) هو:

$$y = a_0 \cos x + a_1 \sin x; a_0, a_1 \in IR$$

تطبيق 2:(حساب التكاملات المحدودة)

مثال 3:

$$I_a = \int_0^a e^{-x^2} dx$$

الدالة $x \to e^{-x^2}$ تقبل دالة أصلية لكن لا يمكن صيغتها بواسطة دوال مألوفة.

نقوم بنشر الدالة $x \to e^{-x^2}$ إلى سلسلة صحيحة

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$$

$$\int e^{-x^2} dx = x - \frac{x^3}{3.1!} + \frac{x^5}{5.2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1).n!} + \cdots$$

$$I_a = \int_0^a e^{-x^2} dx = a - \frac{a^3}{3.1!} + \frac{a^5}{5.2!} + \cdots + (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1).n!} + \cdots$$

$$I_a = \int_0^a e^{-x^2} dx \cong a - \frac{a^3}{3.1!}$$

$$I_a = \int_0^a e^{-x^2} dx \cong a - \frac{a^3}{3.1!} + \frac{a^5}{5.2!}$$

من أجل $a = 1$ نجد :

$$I_1 = \int_0^1 e^{-x^2} dx \cong \frac{2}{3}$$ أو $$I_1 = \int_0^1 e^{-x^2} dx \cong \frac{23}{30}$$

من أجل $a = 2$ نجد :

$$I_2=\int_0^2 e^{-x^2}dx \cong -\frac{2}{3}$$ أو $$I_2=\int_0^2 e^{-x^2}dx \cong \frac{38}{15}$$

مثال 4:

$$J_a=\int_0^a \frac{\sin x}{x}dx$$

الدالة $x \to \frac{\sin x}{x}$ تقبل دالة أصلية على المجال $[0,a]$ ، لكن لا يمكن صيغتها

بواسطة دوال مألوفة.

نقوم بنشر الدالة $x \to \frac{\sin x}{x}$ إلى سلسلة صحيحة:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$\int\frac{\sin x}{x}dx=x-\frac{x^3}{3.3!}+\frac{x^5}{5.5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1).(2n+1)!}+\cdots$$

$$J_a=\int_0^a\frac{\sin x}{x}dx=a-\frac{a^3}{3.3!}+\frac{a^5}{5.5!}+\cdots+(-1)^n\frac{a^{2n+1}}{(2n+1).(2n+1)!}+\cdots$$

$$J_a=\int_0^a \frac{\sin x}{x}dx \cong a-\frac{a^3}{3.3!}$$

أو $J_a=\int_0^a \frac{\sin x}{x}dx \cong a-\frac{a^3}{3.3!}+\frac{a^5}{5.5!}$

سلاسل فورييي

1. تعريف سلسلة فوريي:

إِدا كانت f دالة تحقق الشروط التالية:

1. f دالة معرفة من أجل كل x بحيث $k<x<k+2l \quad k\in IR,$

2. f و $f`$ دالتان مستمرتان بالقطع على المجال $]k. \quad k+2l[$

3. $f(x)=f(x+2l)$ أي f دالة دورية و دورها $T=2l$ فإنه يمكن تمثيل f على شكل السلسلة المثلثية التالية:

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$ و تسمى بسلسلة فوريي

حيث :

$$\forall n \in IN, \qquad a_n = \frac{1}{l} \int_{k}^{k+2l} f(x).\cos \frac{n\pi x}{l}\, dx$$

$$\forall n \in IN, \qquad b_n = \frac{1}{l} \int_{k}^{k+2l} f(x).\sin \frac{n\pi x}{l}\, dx$$

تسمى a_n و b_n بمعاملات فوريي المرافقة لِ f .

ملاحظة:

- في غالب الأحيان نأخد $k = 0$ أو $k = -l$
- في حالة $l = \pi$ فإِن f دالة دورية و دورها 2π و بالتالي يمكن تبسيط سلسلة فوريي.

قضية:

- إِدا كانت f زوجية فإِن $\forall n \in IN^*, \ b_n = 0$ و

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \frac{\cos n\pi x}{l} dx$$

- إِدا كانت f فردية فإِن $\forall n \in IN^*, \ a_n = 0$ و

$$b_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

البرهان: بماأن:

زوجية $f \Leftarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

فردية $f \Leftarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

زوجية $f \Leftarrow x \to f(x)\sin\frac{(n\pi x)}{l}$ دالة فردية وبالتالي:

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{0}^{2l} f(x)\sin\frac{(n\pi x)}{l}dx = 0$$

فردية $f \Leftarrow x \to f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}$ دالة زوجية وبالتالي:

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{0}^{2\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

مثال1:

حيث: $f(x) = x^2$

$0 < x < 2\pi$ مع f دورية ذات الدور $T = 2\pi$

$4\pi^2$

-4π -2π 0 2π 4π

الدور $2\ell = 2\pi$ أي $\ell = \pi$ مع $k = 0$

لدينا:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

حيث:

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx\, dx \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

باستعمال تبديل المتغير و هذا بوضع:

$$u = x^2 \rightarrow u' = 2x$$
$$v' = \cos nx \rightarrow v = \frac{\sin nx}{n}$$

نجد:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[x^2 \frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi} x \sin nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}[x\cos nx]_0^{2\pi} - \frac{2}{\pi n^3}[\sin nx]_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2} \qquad n \neq 0$$

و

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dn = \frac{8\pi^3}{3\pi} = \frac{8}{3}\pi^2$$

بنفس الطريقة نجد: $b_n = -\frac{4}{n}$

$$f(x) = x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4}{n}\sin nx\right) \quad 0 < x < 2\pi$$

2. سلسلة فوريي بالجيب (sinus) أو الجيب تمام (cosinus):

يمكن تمثيل f على شكل سلسلة فوريي ذات sinus أو cosinus و التي هي

سلسلة مثلثية لا تحتوي إلا على حدود بها sinus أو cosinus على التوالي:

ملاحظة:

تكون الدالة في هذه الحالة و بصفة عامة إما زوجية أو فردية و بالتالي

يكفي دراستها على نصف المجال $(]-\ell,\ell[)$ أي $]0,\ell[$

و منه:

في حالة كتابة f على شكل سلسلة فوريي ذات sinus يكون لدينا:

$$a_n = 0 \quad \text{و} \quad b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

في حالة كتابة f على شكل سلسلة فوريي ذات cosinus يكون لدينا:

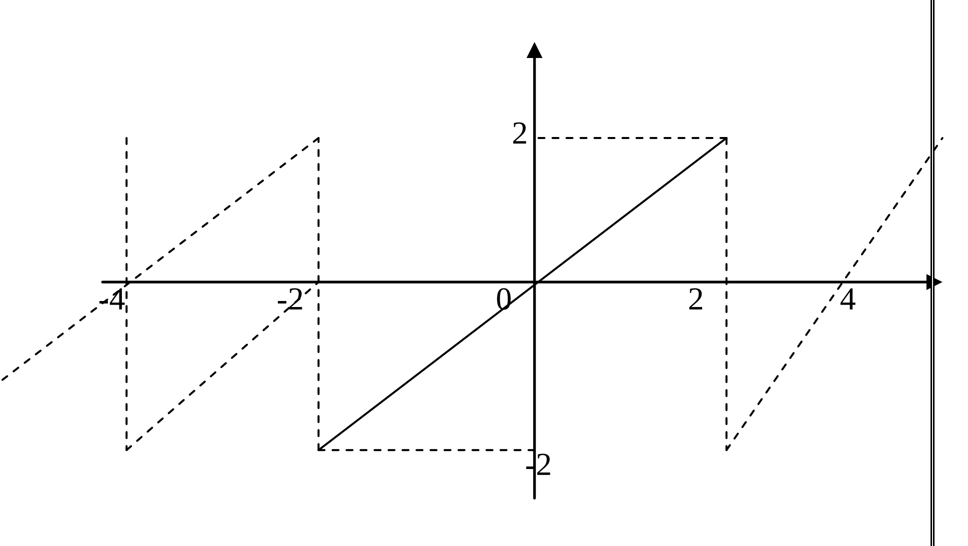
$$b_n = 0 \quad \text{و} \quad a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dn$$

مثال 2:

$$x \to f(x) = x; 0 < x < 2$$

1. نشر f إلى سلسلة مثلثية حدودها sinus:

لنعتبر الدالة f فردية و دورها $2\ell = 4$ $(\ell = 2)$



إذن: $a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

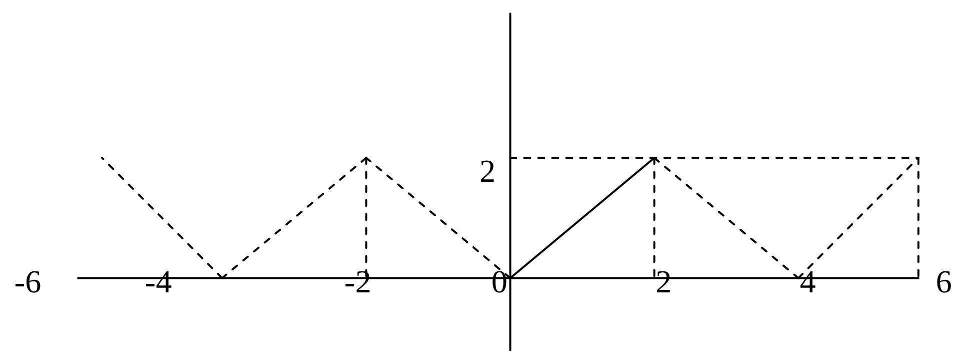
$$= \int_0^{2} x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= -x\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big]_0^2 + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big]_0^2$$

$$= -\frac{(-1)^n 4}{n\pi} +$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

2. امتداد f إلى دالة زوجية دورها $2\ell = 4$ أي $\ell = 2$



$$b_n = 0$$

$$a_n = \int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi - \frac{4}{n^2\pi^2} \qquad n \neq 0$$

$$= \left((-1)^n - 1\right)\frac{4}{n^2\pi^2}$$

$$n_0 = 0 \Rightarrow a_0 = \int_0^2 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2$$

و بالتالي امتداد f إلى دالة زوجية يعطى بسلسلة فوريي المُشكّلَة من cosinus كالآتي:

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n - 1\right]\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$$

3. مساواة بارسفال:

تعطي مساواة بارسفال كما يلي:

$$\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\{f(x)\}^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

حيث: a_n و b_n هما معاملات فوريي المرافقة للتابع f

4. نظرية دير يكلي DIRICHLET :

1. إذا كانت f غير مستمرة عند النقطة $x=a$ لكن تقبل نـهاية على يمين ونـهاية على يسار هذه النقطة أي: $\lim_{t\to 0^+} f(a+t)=f(a^+)$ و

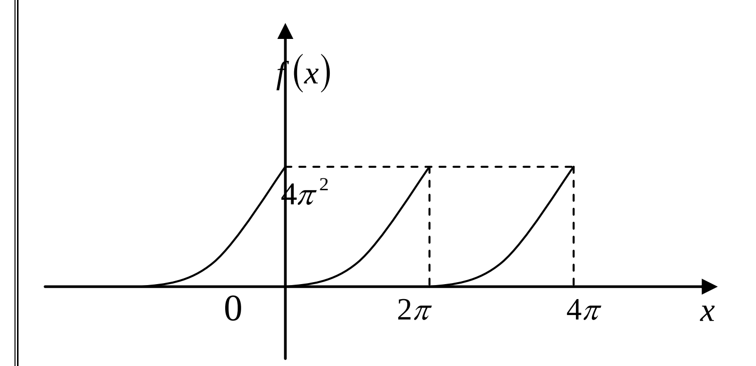
$\lim_{t\to 0^-} f(a-t)=f(a^-)$

2. النهايتين $\lim_{t\to 0+}\frac{f(a-t)-f(a^-)}{t}$ و $\lim_{t\to 0+}\frac{f(a+t)-f(a^+)}{t}$ تبقى محدودتين

فإن سلسلة فوريي متقاربة عند النقطة $x=a$ و يصبح مجموع السلسلة مساويا إلى $\frac{f(a^+)+f(a^-)}{2}$

مثال 3:

$f(x)=x^2 \ / \ \ x\in[0,2\pi]$



$T=2\pi=2L \Rightarrow \pi=L$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nxdx = \frac{4}{n^2}$$

و

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin\frac{n\pi x}{\pi}dx = -\frac{4\pi}{n}$$

و بالتالي تمثيل f على شكل سلسلة فوريي يعطى كالآتي:

$$f(x) = x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx - \frac{1}{n}\sin nx\right)$$

بماأن:

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x) = 4\pi^2;\ \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = 0$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{x^2-4\pi^2}{x-0} = \lim_{\substack{< \\ x\to 2\pi}} \frac{x^2-4\pi^2}{x-2\pi} = 0$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0^+)}{x} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{x^2}{x} = 0$$

فإن:

$$\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=2\pi^2$$

$$\Rightarrow \sum\frac{1}{n^2}=\frac{2\pi^2}{4}-\frac{4\pi^2}{3.4}=\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{3}=\frac{\pi^2}{6}$$

مثال 4:

$$f(x)=x^2 \,/\quad x\in[-\pi,\pi]$$

بماأن f دالة زوجية فإن $b_n=0$

و بالتالي f يكتب على شكل سلسلة فوريي المُشكّلَة من cosinus

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx dx=\frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$a_0=\frac{\pi^2}{3}=\frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big]_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}$$

و منه:

$$f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

من أجل $x=\pi$ لدينا:

$$\pi^2=\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}=\frac{2\pi^2}{12}=\frac{\pi^2}{6}$$

من أجل $x=0$ لدينا:

$$0=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\Rightarrow\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

أعمال موجهة

السلاسل الصحيحة وسلاسل فوريي

نصوص التمارين:

تمرين 1: 1) أوجد شعاع التقارب R_للسلسلة ذات الحد

العام: $u_n(z) = (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}, n \geq 1, z \in C$

أدرس التقارب من أجل $z = R$

2)أحسب مجموع السلسلة لما يكون z حقيقي و استنتج السلسلة

العددية، المتقاربة مطلقًا، و التي مجموعها يساوي $\dfrac{\pi}{4}$.

تمرين 2: أنشر إلى سلسلة صحيحة الدالة

$$x \to f(x) = \frac{1}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$

تمرين 3: انشر على شكل سلسلة فوريي المُشكّلَة من sinus الدالة

$$f(x) = 1; 0 < x < \pi$$

تمرين 4:أكتب f على شكل سلسلة فوريي المُشكّلَة من cosinus عاى

$[0, \pi]$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi x}{4};0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\pi(\pi-x)}{4};\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$$

تمرين 5:أكتب f على شكل سلسلة فوريي المُشكّلَة من cosinus عاى $]0,\pi]$

$$f(x)=Log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)$$

التكاملات الموسعة

1. تعريف :

نقول عن التابع f إنه يتمتع بتكامل موسع، إذا كانت الدالة

f معرفة على مجال كيفي (a,b) ، $(a<b)$ بحيث يكون اقتصار التابع f

على كل قطعة مستقيمة كيفية محتواة في (a,b) قابلا للمكاملة و بالتالي، من أجل

x_0 عدد كيفي من (a,b)، يكون التابع:

$$x \to F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

معرفًا على (a,b).

مثال 1:

- تكاملات على مجال شبه مفتوح :

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad , \quad \int_0^2 \frac{dx}{x} \quad , \quad \int_0^1 \frac{1}{x-1} dx$$

- تكاملات على مجال مفتوح :

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x-1} dx \quad , \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

$$\int_0^4 \frac{d}{x-2} x \qquad / I = [0,2[\cup]2,4]$$

2. التكامل على مجال شبه مفتوح :

1. إذا كانت الدالة f مستمرة على المجال $a \le x < b$ و ليس عند النقطة $x = b$ نعتبر الدالة :

$$x \to F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \forall x \in [a, b[$$

إذا كانت للتابع F نهاية من اليسار منتهية عند النقطة b بحيث $\lim_{x \to b^-} F(x) = l$ نقول أن التكامل الموسع $\int_a^b f(t)dt$ متقارب و نكتب :

$$\int_a^{b-0} f(t)dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt = l$$

في حالة عدم وجود النهاية نقول أن التكامل $\int_a^b f(t)dt$ متباعد.

2. و بطريقة مماثلة، إذا كانت الدالة f مستمرة على المجال $a < x \le b$ و ليس عند النقطة $x = a$، نعتبر الدالة :

$$x \to G(x) = \int_x^b f(t)dt \qquad \forall x \in]a, b]$$

إذا كانت للتابع G نهاية من اليمين منتهية عند النقطة a بحيث

$\lim_{x\to a^+} G(x) = l$ نقول أن التكامل الموسع $\int_a^b f(t)dt$ متقارب و نكتب :

$$\int_{a+0}^{b} f(t)dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt = l$$

في حالة عدم وجود النهاية نقول أن التكامل $\int_a^b f(t)dt$ متباعد.

3. إذا كانت الدالة f مستمرة على المجال $a \le x \le b$ ما عدا عند النقطة c

بحيث $a < c < b$، نعتبر الدالتين :

$$F_1(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \forall x \in [a,c[$$

$$F_2(y) = \int_y^b f(t)dt \qquad \forall y \in]c,b]$$

فإذا وجدت النهايتين $\lim_{x\to c^-} F_1(x) = l_1$ و $\lim_{y\to c^+} F_2(x) = l_2$ نقول أن

التكامل الموسع $\int_a^b f(t)dt$ متقارب و نكتب :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to c^-}\int_a^x f(t)dt + \lim_{y\to c^+}\int_y^b f(t)dt = l_1 + l_2$$

مثال 2:

لنعتبر التكامل الآتي من أجل $\alpha \in IR$:

$$I_\alpha = \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$$

نضع : $\alpha \in IR$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha}$$

1. في حالة $\alpha \neq 1$ لدينا :

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\lim_{x\to+\infty}\left(x^{1-\alpha}-1\right) = \begin{cases} +\infty & 1-\alpha > 0 \\ \dfrac{1}{\alpha-1} & 1-\alpha < 0 \end{cases}$$

2. في حالة $\alpha = 1$:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t} = \lim_{x\to\infty}\int_1^x\frac{dt}{t} = \lim_{x\to+\infty}\log x = +\infty$$

الخلاصة :

التكامل الموسع $\int_{1}^{\infty}\frac{dt}{t^{\alpha}}$ متقارب من أجل $\alpha > 1$ و متباعد من أجل

$\alpha \leq 1$

$$\forall a > 0, \int_{a}^{+\infty}\frac{dt}{t^{\alpha}} = \begin{cases} \alpha > 1 & \text{إذاكان متقارب} \\ \alpha \leq 1 & \text{إذاكان متباعد} \end{cases}$$

مثال 3: لنعتبر التكامل الآتي من أجل $\alpha \in IR$:

$$I_{\alpha} = \int_{1}^{+\infty}\frac{dt}{t^{\alpha}}$$

نضع : $\alpha \in IR$

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dt}{t^{\alpha}} = \lim_{x\to+\infty}\int_{1}^{x}\frac{dt}{t^{\alpha}}$$

- في حالة $\alpha \neq 1$ لدينا :

$$\int_{0}^{1}\frac{dt}{t^{\alpha}} = \lim_{x\to0^{+}}\int_{x}^{1}\frac{dt}{t^{\alpha}} = \lim_{x\to0^{+}}\frac{1}{1-\alpha}\left[1-x^{1-\alpha}\right] = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \alpha - 1 \prec 0 \\ -\infty & -1+\alpha \succ 0 \end{cases}$$

- في حالة $\alpha = 1$:

$$\int_0^1 \frac{dt}{t} = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{dt}{t} = \lim_{x\to 0^+} [\log t]_x^1 = +\infty$$

الخلاصة :

التكامل الموسع $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ متقارب من أجل $\alpha < 1$ و متباعد من أجل $\alpha \geq 1$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \text{متقارب} & \text{إذاكان } \alpha < 1 \\ \text{متباعد} & \text{إذاكان } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

مثال 4:

$$\int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{|1-t^2|}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \lim_{y\to 1^+} \int_y^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} Arc\sin]_0^x + \lim_{y\to 1^+} Argcht]_y^2$$

$$= \lim_{x\to 1^-} (Aresin\, x) + \lim_{y\to 1^+} (Argch2 - Argchy)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

مثال 5:

$$\int_1^4 \frac{1}{t-2}dt = \int_1^2 \frac{1}{t-2}dt + \int_2^4 \frac{1}{t-2}dt$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \int_1^x \frac{1}{t-2}dt + \lim_{x \to 2^+} \int_x^4 \frac{1}{t-2}dt$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \ln|t-2|\Big]_1^x + \lim_{y \to 2^+} \ln|t-2|\Big]_y^4$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \ln(2-x) + \lim_{y \to 2^+} (\ln 2 - \ln(y-2))]$$

$$= \ln 2 + \lim_{\substack{x \to 2^- \\ y \to 2^+}} \ln \frac{2-x}{y-2} = \ln 2$$

4. التكامل على مجال مفتوح :

$\infty \leq a < b \leq +\infty$ $\quad f : \underbrace{]a.b[}_{I} \to IR$ حيث f قابلة

للمكاملة محليا على كل مجال مغلقا من I .

نقول أن التكامل الموسع $\int_a^b f(t)dt$ متقارب إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي c

من $]a,b[$ حيث التكاملين الموسعين المعرفين على التوالي على $]a,c]$ و $[c,b[$

متقاربين و نكتب:

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a^+}\int_x^c f(t)dt + \lim_{y\to b^+}\int_c^y f(t)dt$$

مثال 6:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^0\frac{1}{1+t^2}dt + \lim_{y\to+\infty}\int_0^y\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$= \lim_{x\to-\infty} arctgt]_x^0 + \lim_{y\to+\infty} Arctgt]_0^y$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-Arctgx\right) + \lim_{y\to+\infty} Arctgy = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

حذا ري :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \neq \lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)dt$$

يمكن وجود $\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)dt$ و عدم وجود $\lim_{\substack{x\to-\infty \\ y\to+\infty}}\int_{x}^{y} f(t)dt$

قضية 1:(الدالة الأصلية)

$f:]a,b[\to IR$ قابلة للمكاملة محليا, تكون F الدالة الأصلية ِ ل f إذا

وجدت النهايتين :

$\lim_{x\to a^+} F(x) = A \in IR$ و $\lim_{x\to b^-} F(x) = B \in IR$ و نقول عند ئد

التكامل الموسع $\int_a^b f(t)dt$

متقارب و:

$$\int_a^b f(t)dt = B - A$$

$\forall x \in]a,b[: F'(x) = f(x)$

5. **تغيير المتغير:**

قضية 2:

ليكن $f:]a,b[\to]c,d[$ تطبيق تقابلي متزايد من صنف C^1

و $g:]c,d[\to IR$ تطبيق مستمر إذن التكاملين $\int_c^d g(t)dt$ و

$\int_a^b g\circ f(t).f'(t)dt$ لهما نفس الطبيعة و إذا تقاربا فيكون عندئذ:

$$\int_a^b g\circ f(t).df(t)=\int_c^d g(t)dt$$

مثال 7:

لنعتبر التكامل التالي:

$$I=\int_0^1 \ln^p \frac{1}{x}\,dx$$

نضع : $t=\ln\frac{1}{x}\Rightarrow x=e^{-t}$

$$\Rightarrow dx=-e^{-t}\,dt$$

لنعتبر الدالة f المعرفة كما يلي:

$$f:]0,+\infty[\to]0,+1[$$

$$x\to f(x)=e^{-x}$$

و منه يمكن كتابة التكامل كما يلي:

$$I=\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\,dt$$

حيث: $g:]0,1[\to IR$

$$x\to g(x)=\ln^p\frac{1}{x}$$

6. التكامل بالتجزئة :

قضية 3:

لتكن الدالتين f و g من صنف C^1 بحيث $f,g:]a,b[\to IR$

و لنفرض أن

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x).g(x)=A$ **و** $\lim\limits_{x\to b^-} f(x).g(x)=B$ **إذن** التكامليين

$\int_a^b g'(t)f(t)dt$ **و** $\int_a^b g(t).f'(t)dt$ لهما نفس الطبيعة و إذا تقاربا التكاملان

الموسعان يصبح لدينا:

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt=B-A-\int_a^b f(t)g'(t)dt$$

$$=\lim_{\substack{x\to a^+\\ y\to b^-}} f(t)g(t)]_x^y-\int_a^b f(t)g'(t)dt$$

مثال 8:

لنعتبر التكامل الموسع الآتي:

$$I=\int_0^{+\infty} t e^{-t}\,dt$$

بوضع: $f(t)=t \Rightarrow f'(t)=1$

$$g'(t)=e^{-t} \Rightarrow g(t)=-e^{-t}$$

$\lim_{t\to+\infty} f(t).g(t)=0$ و $\lim_{t\to 0} f(t)g(t)=0$

$$\int_0^{+\infty} t e^{-t}\,dt = 0-\int_0^{+\infty} -e^{-t}\,dt=\lim_{x\to+\infty}\left.-e^{-t}\right]_0^x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1-e^{-x}\right)=1$$

7. التكاملات الموسعة للدوال الموجبة:

النتائج المعطاة من أجل المجالات من الشكل $[a,b[$ تبقى صحيحة من أجل المجالات من الشكل $]a,b]$ و $]a,b[$ (يمكن كتابة المجال $]a,b[$ على الشكل $]a,c]\cup[c,b[$).

نعتبر الدالة الموجبة f $(f\geq 0)$ $f:[a,b[\to IR_+$. في هده الحالة التابع $F:[a,b[\to IR_+$ المعرف كما يلي:

$$x\to F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

متزايد على $[a,b[$ لأن:

$$\forall x_1,x_2\in[a,b[/\,x_1<x_2\Rightarrow F(x_2)-F(x_1)=\int_a^{x^2} f(t)dt-\int_a^{x^1} f(t)dt$$

$$=\int_{x_1}^{x^2} f(t)dt>0$$

قضية 4:

ليكن التابع حيث $f:[a,b[\to IR_+$ قابل للمكاملة محليا و بالتالي:

التكامل $\int_a^b f(t)dt$ متقارب $\Leftrightarrow$ الدالة $x \to F(x) = \int_a^x f(t)dt$ محدودة على

المجال $[a,b[$

$$\exists M \in IR_+ / \forall x \in [a,b[; |F(x)| \leq M \Leftrightarrow$$

مثال 9:

لنعتبر التكامل الموسع: $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dt$

$$I = \lim_{x \to 1^-} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \lim_{x \to 1^-} F(x)$$

$$F(x) = Arc\sin t]_0^x = Arc\sin x - 0 = Arc\sin x.$$

بما أن F تابع محدود على المجال $[0,1[$ لأن:

$$\forall x \in [0,1[; |Arc\sin x| < \frac{\pi}{2}$$

فإن التكامل الموسع I متقارب مع $I = \frac{\pi}{2}$

قضية 5:(معيار المقارنة)

لتكن f و g بحيث $f, g : [a,b[\to IR_+$ قابلان للمكاملة محليا

حيث $0 \le f \le g$ إذن :

1) إذا كان التكامل الموسع $\int_a^b g(t)dt$ متقارب فإن التكامل $\int_a^b f(t)dt$ متقارب.

2) إذا كان التكامل الموسع $\int_a^b f(t)dt$ متباعد فإن التكامل الموسع $\int_a^b g(t)dt$ متباعد

<u>مثال 10:</u>

لنعتبر التكامل الموسع $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$

بما أن $0 < t < t^2$ و هذا من أجل $\forall t \in [1,+\infty[$ فإن:

$$0 < e^{-t^2} < e^{-t}$$

بما أن التكامل $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t}\Big]_1^{\infty} = e^{-1}$ فإن و حسب معيار المقارنة، التكامل

الموسع $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ متقارب.

مثال 11:

لنعتبر التكامل الموسع الآتي: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t}$

لدينا: $0 \le \sin t \le t$ $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ و منه $\frac{1}{t} \le \frac{1}{\sin t}$

و بماأن التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t} dt$ متباعد لأن:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t} dt = \lim_{x \to 0} \ln t \Big]_x^{\frac{\pi}{2}} = \ln \frac{\pi}{2} + \infty = +\infty$$

فإن حسب معيار المقارنة، التكامل الموسع $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t} dt$ متباعد .

نتيجة : $f, g : [a, b[\to IR_+$ و $g \ne 0$

1. إذا كان $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ و $\int_a^b g(t) dt$ متقارب فإن $\int_a^b f(t) dt$ متقارب

2. إذا كان $\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=k$ فإن $\int_a^b f(t)dt$ و $\int_a^b g(t)dt$ لهما نفس الطبيعة .

3. إذا كان $\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$ و $\int_a^b g(t)dt$ متباعد فإن $\int_a^b f(t)dt$ متباعد

ملاحظة 1:

$$f \underset{b}{\cong} k.g \Leftrightarrow \lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=k\in IR_+^*$$

$f \underset{b}{\cong} g \Leftrightarrow$ $\int_a^b f(t)dt$ و $\int_a^b g(t)dt$ لهما نفس الطبيعة.

البرهان:

يمكن مرافقة كل عدد ε كيفي بحيث $0<\varepsilon<k$ بعدد c من $[a,b[$

ينتج:

$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-k\right|<\varepsilon$ من أجل $x\in[c,b[$

و بالتالي:

$$(k-\varepsilon)g(x) < f(x) < (k+\varepsilon)g(x)$$

و حسب النظرية السابقة، إذا كان التكامل $\int_c^{b^-} g(t)dt$ متقارب فإن التكامل

$(k+\varepsilon)\int_c^{b^-} g(t)dt$ متقارب كذلك، مِمَّا يؤدي إلى تقارب التكامل $\int_c^{b^-} f(t)dt$ و هذا

بسبب المتراجحة الواردة على اليمين.

إذا فرضنا العكس لكان التكامل $(k-\varepsilon)\int_c^{b^-} g(t)dt$ متباعد وبالتالي يكون التكامل

$\int_c^{b^-} f(t)dt$ متباعد وفقًا للمتراجحة الواردة في اليسار.

ملاحظة :

تبقى النتيجة صحيحة إذا بدلنا f بِ g و g بِ f ، لأنه يمكن

أن نكتب أيظًا:

$$\lim_{x \to b^-} \frac{g(x)}{f(x)} = 1/k$$

مثال 12: لنعتبر التكامل الموسع الآتي:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^{3/2}}{1+t^2} dt$$

$$f(t) = \frac{t^{3/2}}{1+t^2} = \frac{t^{3/2}}{t^2\left(1+\frac{1}{t^2}\right)} \underset{\infty}{\cong} \frac{t^{3/2}}{t^2} = \frac{1}{t^{1/2}}$$

- التكامل $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1/2}} dt$ متباعد لأنه تكامل ريمان مع $\alpha \le 1$
- التكامل $\int_0^{1} \frac{1}{t^{1/2}} dt = 2$ متقارب (تكامل ريمان مع $\alpha \le 1$)

و بالتالي التكامل I متباعد $\int_0^{1} \frac{1}{t^{\alpha}} dt$ متقارب من أجل $\alpha \prec 1$

مثال 13:

لنعتبر التكامل الموسع الآتي: $I = \int_0^{+\infty} \frac{Arctgt}{t} dt$

لنعتبر التابع $f :]0,+\infty[\to IR_+$ بحيث $f(t) = \frac{Arctgt}{t}$

ليكن العدد الحقيقي الموجب $a, (a > 0)$ لنفكك التكامل I كما يلي

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{a} f(t)dt + \int_a^{+\infty} f(t)dt$$

- بما أن $\frac{Arctgt}{t} \underset{0}{\cong} 1$ فإن التكامل $\int_0^a f(t)dt$ متقارب

- بما أن $\frac{Arctgt}{t} \underset{+\infty}{\cong} \frac{\pi}{2t}$ لأن $\lim_{t \to +\infty} \frac{Arctgt}{t}.t = \frac{\pi}{2}$ فإن $\lim_{t \to +\infty} \frac{\frac{Arctgt}{t}}{\frac{1}{t}}$

التكاملان $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ و $\int_a^{+\infty} \frac{Arctgt}{t} dt$ لهما نفس الطبيعة.

و بما أن التكامل $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ متباعد فإن التكامل $\int_a^{+\infty} \frac{Arctgt}{t} dt$ متباعد و بالتالي

فإن التكامل I متباعد.

<u>قضية :</u> ليكن f تابع مستمر و متناقص بحيث : $f : [1, +\infty[\to IR_+$

إذن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ و التكامل $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ لهما نفس طبيعة.

<u>معيار آبال :</u>

ليكن f و g تابعين قابلان للمكاملة محليًا بحيث $f, g : [a, b[\to IR$

إذا كان:

1. f تابع موجب و متناقص مع $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=0$

2. $\exists M \in IR_+ : \forall x \in [a,b[, \left|\int_a^x g(t)dt\right| < M$

فإن التكامل $\int_a^b f(t)g(t)dt$ متقارب

نتيجة :

ليكن f و g تابعين قابلان للمكاملة محليًا بحيث $f,g:[a,b[\to IR$

إذا كان:

1. f تابع رتيب و محدود على $[a,b[$

2. التكامل الموسع $\int_a^{b^-} g(t)dt$ متقارب

فإن التكامل الموسع $\int_a^b f(t)g(t)dt$ متقارب

مثال : لنعتبر التكامل الموسع الآتي: $I=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$

نضع: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \sin t dt$

إذا أخذنا: $f(t) = \frac{1}{t}$ و $g(t) = \sin t$ نجد:

1. f تابع موجب و متناقص $\forall t \in [1, +\infty[$ و $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$

2. $\left| \int_1^x \sin t dt \right| = |\cos x - \cos 1| < 2$

بما أن شروط معيار آبال محققة فإن التكامل $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ متقارب

مثال 2 : لنعتبر التكامل الموسع الآتي: $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

لدينا: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} = \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

بما أن: $\frac{\sin t}{t} \underset{0}{\cong} 1$ و $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ متقارب و حسب المثال السابق فإن التكامل

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ متقارب

التقارب المطلق:

تعريف:

ليكن التابع f بحيث $f:[a,b[\to IR$ قابل للمكاملة محليا.

نقول أن التكامل الموسع $\int_a^b f(t)dt$ متقارب مطلقا إذا و فقط إذا كان التكامل $\int_a^b |f(t)|dt$ متقارب

$$\int_a^b f(t)dt \text{ متقارب مطلقا } \Leftrightarrow \int_a^b |f(t)|dt \text{ متقارب}$$

مثال : لنعتبر التكامل الموسع الآتي:

$$I=\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t dt$$

بما أن: $\forall t\geq 0; \left|e^{-t}\sin t\right|\leq e^{-t}$

و بما أن التكامل $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ متقارب لأن:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^x = 1$$

و حسب معيار المقارنة فإن التكامل $\int_0^{+\infty}\left|e^{-t}\sin t\right|dt$ متقارب و منه فإن I متقارب

مطلقا.

تعريف :

نقول أن التكامل الموسع $\int_a^b f(t)dt$ شبه متقارب إذا كان $\int_a^b f(t)dt$

متقارب و ليس متقارب مطلقا.

تطبيق :

أدرس التقاب المطلق و التقارب البسيط للتكامل الموسع:

$$I(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}dt$$

بحيث $p \in IR$

التكاملات الموسعة المتعلقة بوسيط:

نعتبر المجال $I=[a,b[$ و $X=[A,B]$ ، كل النتائج و التعاريف تبقى صحيحة من أجل المجالات من الشكل:

$$]a,b],[a,+\infty[,]a,b[,]-\infty,b] \quad \text{و} \quad]a,b[\cup]b,c[$$

نعتبر التابع $(x,t)\to f(x,t)$ مستمر على جداء المجالين $[A,B]\times[a,b[$

$$f:X\times I\to IR \qquad\qquad I=[a,b[$$

تعريف1:

نقول أن التكامل $\int_a^b f(x,t)dt$ متقارب ببساطة على X إذا كان التكامل $\int_a^b f(x,t)dt$ متقارب من أجل كل $x \ni X$

نعتبر F بحيث : $F:X\to IR$

$$x\to F(x)=\int_a^b f(x,t)dt$$

تعريف2:

نقول أن التكامل الموسع $\int_a^b f(x,t)dt$ متقارب بانتظام على X إذا كان:

1. التكامل الموسع $\int_a^b f(x,t)dt$ متقارب ببساطة

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a,b[/ \forall v \in [c,b[, \forall x \in X; \left|\int_c^v f(x,t)dt\right| < \varepsilon$

تعريف3:

نقول أن التكامل $\int_a^b f(x,t)dt$ متقارب نظيميا على X إذا وجد تطبيق g

من $[a,b[$ نحو IR_+ يحقق:

1. $|f(x,t)| < g(t), \forall t \in [a,b[, \forall x \in X$

2. g دالة قابلة للمكملة محليًا على $[a,b[$

3. التكامل الموسع $\int_a^b g(t)dt$ متقارب

معيار آبال: (للتقارب المنتظم)

ليكن التطبيق $g : X \times [a,b[\to IR$

بحيث:

1. $\forall x \in X, g(x,t) : I \to IR$ قابلة للمكملة محليا

2. $\exists M \in IR_+ \, | \forall v \in [a,b[, \forall x \in X ; \left| \int_a^v g(x,t)dt \right| < M$

فإن التكامل الموسع $\int_a^b f(x,t)g(x,t)dt$ متقارب بانتظام على X.

مثال 1:

$$\int_1^{\infty} e^{-t2} \frac{\sin t}{t} dt \qquad\qquad x \in [0,+\infty[$$

- $f(x,t) = \frac{e^{-tx}}{t} \in IR; f \downarrow$ و $\sup_{x \in IR_+^+} f(x,t) = \frac{1}{t} \underset{t \to +\infty}{\to} 0$
- $g(x,t) = \sin t \qquad \forall u \in [1,+\infty[\left| \int_0^u \sin t dt \right| = |1 - \cos u| \le 2$

التكامل الموسع متقارب بانتظام على IR_+

مثال 2:

حساب التقارب البسيط للتكامل

$$I(x)=\int_1^{\infty} e^{-tx}\frac{\sin t}{t}dt : x\in[0,+\infty[$$

ندرس التقارب المطلق.

لدينا: $\left|e^{-tx}\frac{\sin t}{t}\right|\le e^{-tx}$

و منه $x\neq 0$ / $\int_1^{+\infty} e^{-tx}dt=\lim_{y\to+\infty}\int_1^{y} e^{-tx}dt=\lim_{y\to+\infty}\left[\frac{-e^{-tx}}{x}\right]_1^y$

$$=\begin{cases}\frac{e^{-x}}{x} & x>0\\ \infty & x\le 0\end{cases}$$

من أجل x ∍ $]0,+\infty[$ التكامل متقارب ببساطة لأنه متقارب مطلقا.

مثال3:

دراسة التقارب النظيمي (العادي) للتكامل

$$\Im(x)=\int_1^{\infty} e^{-tx}\frac{\sin t}{t}dt \quad \text{حيث} \quad x\in[1,+\infty[$$

$$\left|e^{-tx}\frac{\sin t}{t}\right|\leq e^{-xt}\leq e^{-t}$$

$g(t)=e^{-t}$ قابلة للمكاملة محليا على $[1,+\infty[$

متقارب $\int_1^{+\infty} e^{-t}dt=\lim_{y\to+\infty}\int_1^{y} e^{-t}dt=\lim_{y\to\infty}-e^{-t}\Big]_1^y=e^{-1}$

نظرية :

إذا كان التكامل $\int_a^b f(x,t)dt$ متقارب نظيميا على X فإنه متقارب بانتظام

على X

مثال 4:

التكامل الموسع $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(tx)}{1+t^2}dt$ متقارب نظيميا $\forall x\in IR$

لأن :
$$\frac{\sin^2 tx}{1+t^2}\leq\frac{1}{1+t^2}$$

و بما أن التكامل : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ متقارب بحيث:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

فإن : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{1+t^2}\,dt$ متقارب بانتظام

نظرية : (الاستمرارية)

ليكن $f : X \times I \to IR$ مستمر بالنسبة إلى (x,t)

إذا كان $\int_a^b f(x,t)dt$ متقارب بانتظام على X فإن الدالة المعرفة بِ:

$F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ مستمرة على X .

نظرية : (الاشتقاق)

ليكن $f : X \times I \to IR$ مستمر بالنسبة إلى (x,t) بحيث:

1. $\int_a^b f(x,t)dt$ متقارب ببساطة

2. $\frac{\partial f}{\partial x}$ موجودة و مستمرة على $X \times I$

3. $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ متقارب بانتظام على X .

فإن الدالة $F(x)=\int_a^b f(x,t)dt$ قابلة للاشتقاق على X و

$$F'(x)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

مثال 5:

نريد حساب التكامل $I=\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$

نعتبر التكامل الموسع المرتبط بوسيط: $F(x)=\int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin t}{t}dt$

لدينا: $F(0)=I$

هل بإِمكاننا الاشتقاق؟ $F'(x)\overset{?}{=}-\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin t\,dt$

1. التقارب البسيط:

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin t}{t}dt = \int_0^1 e^{-tx}\frac{\sin t}{t}dt + \int_1^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin t}{t}dt = \Im_1 + \Im_2$$

- لدينا: $e^{-tx}\frac{\sin t}{t} \underset{0}{\cong} 1$

و بما أن: $\int_0^1 dt = 1$ فإن التكامل $\Im_1$ متقارب $\forall x$

- بما أن $t^2 e^{-tx}\left|\frac{\sin t}{t}\right| \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ فيمكن مقارنة $\Im_2$ مع $\int_1^{\infty}\frac{1}{t^2}dt$

حسب معيار المقارنة و بما أن $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ متقارب فإن $\Im_2$ متقارب مطلقا

$\forall x > 0$ و بالتالي فإن التكامل الموسع المرتبط بوسيط $\Im_1 + \Im_2$ متقارب

ببساطة.

2. التقارب المنتظم:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

$$\left|e^{-tx}\sin t\right| < e^{-tx} < e^{-tx_0} \quad \text{مع} \quad 0 < x_0 \le x$$

بما أن التكلمل $\int_0^{+\infty} e^{-tx_0}\, dt = \frac{1}{x_0}$ متقارب فإن التكامل $\int_0^{\infty} e^{-tx} \sin t dt$ متقارب

نظيميا و حسب النظرية فهو متقارب بانتظام على المجال $]x_0,+\infty[$.

و بالتالي التابع F قابل للإشتقاق و لدينا:

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin t dt$$ متقارب بانتظام

باستعمال التكامل بالتجزئة:

بوضع: $du = e^{-tx} dt \;\; \Rightarrow u = -\frac{e^{-tx}}{x}$

$$\Rightarrow dv = \cos t dt$$

$$v = \sin t$$

$$F'(x) = \frac{-1}{x} \overset{\overset{0}{\uparrow}}{\sin t}\, e^{-tx}\Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{-tx} \cos t dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{-tx} \cos t dt$$

باستعمال التكامل بالتجزئة مرة أخرى نجد:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{-tx} \cos t dt = -\frac{\cos t\, e^{-tx}}{x^2}\Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx}}{x^2} \sin t dt = \frac{1}{x^2} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx}}{x^2} \sin t dt$$

$$\Rightarrow\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\int e^{-tx}\sin t dt=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow F'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow F(x)=-Arctgx+C \qquad\qquad C=?$$

$$|F(x)|\le\int_0^{+\infty}e^{-tx}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt\le\int_0^{+\infty}e^{-tx}dt=\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$$

و بما أن : $\lim_{x\to+\infty}F(x)=-\frac{\pi}{2}+C=0\Rightarrow C=\frac{\pi}{2}$

$$F(x)=-Arctgx+\frac{\pi}{2},\forall x\ge x_0>0\Rightarrow F(0)=\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}=\frac{\pi}{2}$$

أعمال موجهة

التكاملات الموسعة

نصوص التمارين:

تمرين 1:

أدرس التقارب التكاملات الموسعة التالية و احسبها إذا أمكن:

1) $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{1-t^2} dt$

2) $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)^{1/2}} dt$

3) $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{Sht} dt$

$\int_{1}^{+\infty} Arctg\frac{1}{t}dt$ (4

$\int_{0}^{+\infty} t^2 e^{-t}dt$ (5

تمرين 2:

أدرس التقارب التكاملات الموسعة التالية:

$\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{1/2}}dt$ (1

$\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}dt$ (2

$\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2}dt$ (3

$\int_{1}^{+\infty} Arctg\frac{1}{t}dt$ (4

$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}} - \cos\frac{1}{t}\right)dt$ (5

تمرين 3: أثبت أن التكاملين الموسعين التاليين متقاربين من أجل $0 \le x \le 1$

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2 t^e}\,dt \qquad \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin xt}{t}\,dt$$

أدرس هل هذان التكاملان متقاربان بانتظام بالنسبةِ لِ x على المجال $[0,1]$

تمرين 4:

أ)أثبت أن التابع :

$$x \to \Gamma(x) = \int_{0}^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

معرف و مستمر من أجل $x > 0$. هل للتابع Γ نهاية عند النقطة 0؟

ب) أثبت مكاملا بالتجزئة أن:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

أحسب $\Gamma(p+1)$ من أجل $p > 0$ طبيعي.

ج) أثبت أن التابع Γ يقبل على $]0,+\infty[$ مشتقات من كل رتبة تحقق من أجل $x > 0$:

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} (Logt)^n \, dt$$